Z-2011 Primer Parcial Fecha: 3 – 06 - 23

Apellido y Nombre:...

....

Teórico 1) Demostrar que si un campo escalar es diferenciable en $\bar{X}_0 \Rightarrow f$ es continua en $\bar{X}_0$

Teórico 2) Sea $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $k \in I_f$. a) Defina conjunto de nivel k de f

b) Halle el conjunto de nivel 0 de f y represéntelo / $f(x,y) = \dfrac{x^2 + y - 4x}{\sqrt{x.y}}$

P1) Sea $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Si la superficie de ecuación $z = f(x,y)$ tiene plano tangente de ecuación: $2x + y - 3z = 3$ en el punto $(3,3,z_0)$. Se pide: a) Calcular $f'((3;3),\bar{u})$ si $\bar{u}$ es tangente en $\bar{A} = (4,\sqrt{8})$ a la curva de nivel cero del campo g

$g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} / \; g(x,y) = \dfrac{x^2+y^2 - 6x}{\sqrt{y}}$

P 2) Sea $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} / f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2x^2 . y - 4x^3}{x^2+y^2} & \text{si } x \neq 0 \quad \text{B} \\ \operatorname{sen}(x.y + 2y) & \text{si } x = 0 \quad \text{A} \end{cases}$

I) Analice derivabilidad de f $\forall \bar{u}$ en $\bar{X}_0 = (0,0)$ II) Halle, si existe, $\bar{\nabla} f(\bar{X}_0)$ con $\bar{X}_0 = (0,0)$

III) ¿Se cumple: $\forall \bar{u} : f'(\bar{X}_0, \bar{u}) = \bar{\nabla} f(\bar{X}_0) \cdot \bar{u}$? IV) Analice si f es diferenciable en $(0,0)$

P 3) Dada $z = f(u,v) \; / \; f(u,v) = uv - v^2$

con $(u,v) = (\; x^3 + x.y \; , \; \varphi(x,y)\;)$ resulta $h = f \circ \bar{g}$.

$v = \varphi(x,y)$ está definida implícitamente por $v^2.x + 3\ln(y - v) + x^2 - 3y + 4v = 0$

a) Halle la ecuación del plano tangente a la gráfica de h en $\bar{P}_0 = (1,2,h(1,2))$

b) Halle aproximadamente $h(1{,}03\,;1{,}98)$

P4) Sea la ecuación: $4x + 6y - 2z + 2 = 0$ la del plano tangente en $\bar{X}_0 = (2,1,z_0)$ a la gráfica de ecuación $z = h(x,y) \; / \; h = f \circ \bar{g}$ con f diferenciable.

$\bar{g}(x,y) = (x^2 . y \; , \; \phi(x) + 2y)$ $\qquad \phi(x) + x.\phi'(x) = 0$ con $\phi(2) = 1$

Halle la derivada direccional máxima de f en $(4,3)$ y la dirección responsable.

AM 2	Primer Parcial Prof. Amed	HOJA N° 1/4 FECHA 3-6-23

T1 (*) Demostrar que si un campo escalar es diferencial en $\bar{X}_0$ $\Rightarrow$ f es continua en $\bar{X}_0$

f es diferenciable en $\bar{X}_0$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow f(\bar{x}_0+\vec{v}) - f(\bar{x}_0) = \nabla f(\bar{x}_0)\cdot\vec{v} + \varepsilon(\vec{v})\,\|\vec{v}\| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{\vec{v}\to\vec{0}}\left[f(\bar{x}_0+\vec{v}) - f(\bar{x}_0)\right] = \lim_{\vec{v}\to 0}\left[\nabla f(\bar{x}_0)\cdot\vec{v} + \underbrace{\varepsilon}_{\to\vec{0}}\,\vec{v}\,\|\vec{v}\|\right] \Rightarrow$$

álgebra de límites

$$\Rightarrow \lim_{\vec{v}\to\vec{0}} f(\vec{x}_0+\vec{v}) - \underbrace{\lim_{\vec{v}\to\vec{0}} f(\bar{x}_0)}_{\mathrm{I}} = \underbrace{\lim_{\vec{v}\to\vec{0}} \nabla f(\vec{x}_0)\cdot\vec{v}}_{\exists\,\mathrm{II}} + \underbrace{\lim_{\vec{v}\to\vec{0}} \varepsilon(\vec{v})\,\|\vec{v}\|}_{\to 0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{\vec{v}\to\vec{0}} f(\vec{x}_0+\vec{v}) - f(\vec{x}_0) = 0 + 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\lim_{\vec{v}\to\vec{0}} f(\vec{x}_0+\vec{v}) = f(\bar{x}_0) \Rightarrow f \text{ es continua en } \bar{X}_0}$$

(I) f es dif $\Rightarrow \bar{X}_0 \in Dom(f) \Rightarrow \exists \underbrace{f(\bar{X}_0)}_{\in\mathbb{R}} \Rightarrow \lim_{\vec{v}\to\vec{0}} f(\bar{x}_0) = \bar{X}_0$

(II) f es dif $\Rightarrow \exists\, \nabla f(\bar{x}_0) \Rightarrow \lim_{\vec{v}\to\vec{0}} \nabla f(\bar{x}_0)\cdot\underbrace{\vec{v}}_{\to 0} = 0$

NOTA

T2 Sea $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $k \in Ff$

a) Definir conjunto de nivel k de f

$$\boxed{C_k = \{(x,y) \in Dom(f) \ / \ f(x,y) = k\}}$$

b) Hallar el conj. de nivel 0 de f y representarlo:

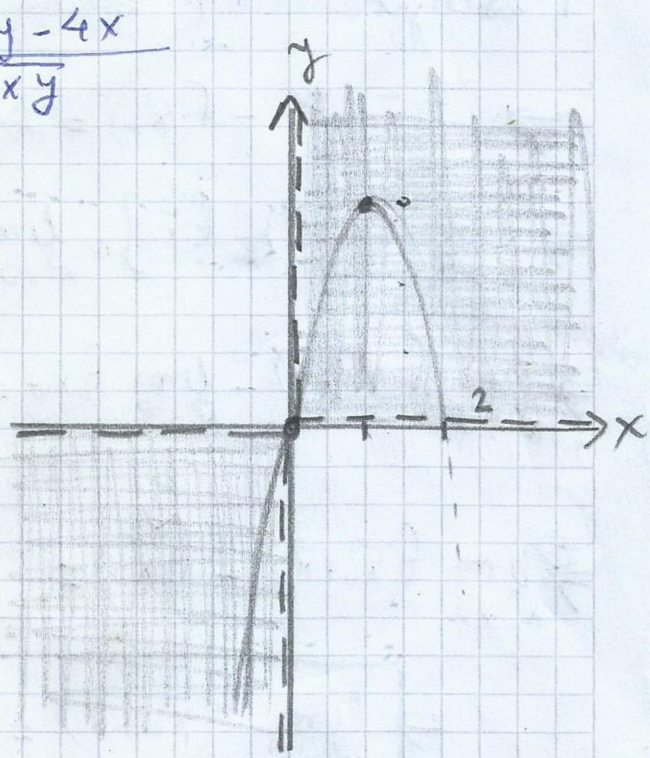
$$f(x,y) = \frac{x^2 + y - 4x}{\sqrt{xy}}$$

$Dom(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ xy > 0\}$

$x > 0 \wedge y > 0$

$\cup$

$x < 0 \wedge y < 0$



$C_0 = \{(x,y) \in Dom(f) \ / \ x^2 + y - 4x = 0\}$

$y = -x^2 + 4x = -x(x-4)$

raíces $\to x = 0$, $x = 2$ $\}$ $x_v = 1$

$y_v = -(1)^2 + 4 \cdot 1 = 3$

$$\boxed{C_0 = \{ y = -x^2 + 4x \ \wedge \ xy > 0 \}}$$

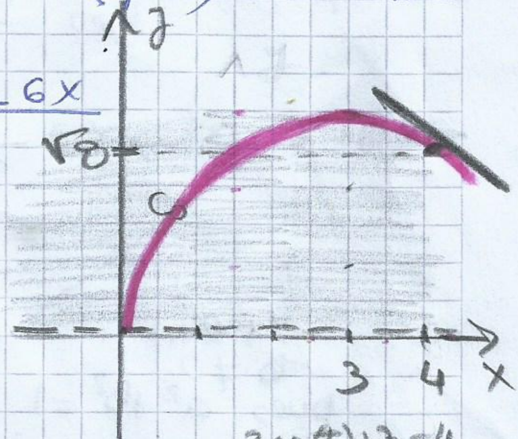
AM2	Primer Parcial — Prof. Amed	HOJA N° 2/4 — FECHA 3-6-23

P1) Sea $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Si la sup. de ecuación $z = f(x,y)$ tiene plano tangente de ecuación $2x + y - 3z = 3$ en el punto $(3, 3, z_0)$

Se pide:

a) Calcular $f'((3,3), \check{u})$ si $\check{u}$ es tangente en $\hat{A} = (4, \sqrt{8})$ a la curva de nivel 0 del campo g

$$g(x,y) = \frac{x^2 + y^2 - 6x}{\sqrt{y}}$$



$Dom(g) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y > 0\}$

$C_0 = \{(x,y) \in Dom(g) / x^2 + y^2 - 6x = 0\}$

$$x^2 - 6x + 3^2 - 3^2 + y^2 = 0$$

$$\boxed{(x-3)^2 + y^2 = 9}$$

$3\cos(t) + 3 = 4$

$3\cos(t) = 1$

$3\,\text{sen}(t) = \sqrt{2}$

$C_0: \vec{\gamma}(t) = (3\cos(t) + 3, 3\,\text{sen}(t)) = (4, \sqrt{8})$

$\vec{\gamma}'(t) = (-3\,\text{sen}(t), 3\cos(t)) = (-\sqrt{8}, 1)$

$\vec{u} = (-\sqrt{8}, 1) \to \|\vec{u}\| = \sqrt{(-\sqrt{8})^2 + 1^2} = \sqrt{8+1} = \sqrt{9} = 3$

$\check{u} = \left(\frac{-\sqrt{8}}{3}, \frac{1}{3}\right)$

Plano tangente a la gráfica de f en $(3,3,z_0)$: $2x + y - 3z = 3$

$z = \frac{2x}{3} + \frac{y}{3} - \frac{3}{3} \to f'_x(3,3) = 2/3$, $f'_y(3,3) = 1/3$

$f'((3,3), \check{u}) \underset{f \text{ es dif}}{=} \nabla f(3,3) \cdot u = (2/3, 1/3)\left(-\frac{\sqrt{8}}{3}, \frac{1}{3}\right) = \frac{-2\sqrt{8}}{9} + \frac{1}{9} = \frac{1 - 2\sqrt{8}}{9}$

$$\boxed{f'((3,3), \check{u}) = \frac{1 - 2\sqrt{8}}{9}}$$

no hay b)

NOTA

P2) Sea $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ / $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2x^2y - 4x^3}{x^2+y^2} & \text{si } x \neq 0 \\ \operatorname{sen}(xy + 2y) & \text{si } x = 0 \end{cases}$

si $x=0 \to f(0,0) = \dfrac{\operatorname{sen}(2\times 0)}{0}$

I) Analizar derivabilidad de f $\forall \breve{u}$ en $\bar{x}_0 = (0,0)$

$\breve{u} = (a,b)$ con $a^2+b^2 = 1$

$$f'((0,0),\breve{u}) = \lim_{h\to 0} \frac{f((0,0) + h\overset{(a,b)}{\breve{u}}) - \overset{0}{f(0,0)}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(ha, hb)}{h} \overset{\text{I}}{=}$$

- si $a=0 \to x=0 \to \overset{\text{I}}{=} \lim_{h\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(0hb + 2hb)}{h} = \lim_{h\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(2hb)}{h}$

si $b \neq 0 \to \lim_{h\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(2hb)}{h} \dfrac{2b}{2b} = 2b$

si $a=0$
$b \neq 0$
pues $a^2+b^2=1$

si ~~$b=0$~~ $\to \lim_{h\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(0)}{0} = \cancel{0}$

- si $a \neq 0 \to x \neq 0 \to \overset{\text{I}}{=} \lim_{h\to 0} \dfrac{1}{h} \cdot \dfrac{2h^2a^2hb - 4h^3a^3}{h^2a^2+h^2b^2} =$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{\cancel{h}} \frac{\cancel{h^3}^{2}(2a^2b - 4a^3)}{\cancel{h^2}\underbrace{(a^2+b^2)}_{1}} = 2a^2b - 4a^3$$

$$\boxed{f'((0,0),\breve{u}) = \begin{cases} 2b & \text{si } a=0 \\ 2a^2b - 4a^3 & \text{si } a \neq 0 \end{cases}}$$

f es derivable en $(0,0)$

II) Hallar, si existe, $\bar{\nabla} f(x_0)$, con $\bar{x}_0 = (0,0)$

$$f'_x(0,0) = f'((0,0)(\overset{a=1}{1},0)) = 2a^2b - 4a^3\Big|_{\substack{a=1\\b=0}} = -4$$

$$f'_y(0,0) = f'((0,0),(0,1)) = 2b\Big|_{\substack{a=0\\b=1}} = 2$$

$$\boxed{\bar{\nabla} f(0,0) = (-4, 2)}$$

NOTA :

AM2	Primer Parcial Prof. Amed	HOJA N° 3/4 FECHA 3-6-23

P2) cont

III) ¿Se cumple $\forall \breve{u}: f'(\bar{x}_0, \breve{u}) = \vec{\nabla} f(\bar{x}_0)\, \breve{u}$?

Tomo $\breve{u} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

Según lo obtenido en II: $f'((0,0), \breve{u}) = \nabla f(0,0) \cdot \breve{u} =$

$$= (-4, 2)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{-4}{\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{-2}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \boxed{f'((0,0), \breve{u}) = \frac{-2}{\sqrt{2}}} \; \bullet$$

Pero, según lo obtenido en I resulta:

$$a = b = \frac{1}{\sqrt{2}} \longrightarrow a \neq 0 \rightarrow f'((0,0), \breve{u}) = 2a^2 b - 4a^3 =$$

$$= 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \frac{1}{\sqrt{2}} - 4\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3 =$$

$$= \frac{2}{2\sqrt{2}} - \frac{4}{2\sqrt{2}} = \frac{-3}{2\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \boxed{f'((0,0), \breve{u}) = \frac{-3}{2\sqrt{2}}} \; \bullet\bullet$$

$$\bullet \neq \bullet\bullet \Rightarrow \boxed{\text{No se cumple que, } \forall \breve{u} \;\; f'((0,0), \breve{u}) = \vec{\nabla} f(0,0)\, \breve{u}}$$

IV) Analizar si f es diferenciable en (0,0)

Por lo respondido en III $\Rightarrow$ $\boxed{\text{f NO es diferenciable}}$ pues si lo fuese $\Rightarrow f'((0,0), \breve{u}) = \vec{\nabla} f(0,0)\, \breve{u}$ (pero no se cumple)

NOTA

P3) Dado $z = f(u,v)$ / $f(u,v) = uv - v^2 \to \nabla f(u,v) = (v, u-2v)$

con $(u,v) = (x^3+xy, \varphi(x,y))$ resulta $h = f\circ\bar{g}$

$v = \varphi(x,y)$ está definida implícitamente por

$$v^2 x + 3\ln(y-v) + x^2 - 3y + 4v = 0$$

a) Hallar la ec. del plano tangente a la gráfica de h en $\bar{P}_0 = (1,2,h(1,2))$

$\bar{g}(x,y) = (x^3+xy, \varphi(x,y))$

$\boxed{\begin{matrix} x=1 \\ y=2 \end{matrix}}$ v:

$\hookrightarrow v^2\underset{\uparrow x}{1} + 3\ln(\underset{\uparrow y}{2}-v) + \underset{\uparrow x^2}{1^2} - 3\times 2 + 4v = 0 \to \boxed{v=1} = \varphi(1,2)$

$\bar{g}(1,2) = (1^3 + 1\times 2, \overbrace{\varphi(1,2)}^{v}) = (3,1)$ $\quad F(3,1) = 3 - 1^2 = 2 = z$

• $F(x,y,v) = v^2 x + 3\ln(y-v) + x^2 - 3y + 4v$

$F'_x = v^2 + 2x \longrightarrow F'_x(1,2,1) = 3$

$F'_y = \frac{3}{y-v} - 3 \longrightarrow F'_y(1,2,1) = 0$

$F'_v = 2vx + \frac{3(-1)}{y-v} + 4 \to F'_v(1,2,1) = 3$

$\varphi'_x(1,2) = -\frac{3}{3} = -1$

$\varphi'_y(1,2) = 0$

$h(1,2) = f(\bar{g}(1,2)) = f(3,1) = 2$

$\hookrightarrow Dh(1,2) = Df_{\bar{g}(1,2)}\, D\bar{g}(1,2) = Df(3,1)\cdot\begin{pmatrix} 3x^2+y & x \\ \varphi'_x(1,2) & \varphi'_y(1,2)\end{pmatrix}\Bigg|_{(1,2)} =$

$= \begin{bmatrix} v & u-2v \end{bmatrix}\Big|_{(3,1)}\cdot\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -1 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -1 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underset{h'_x}{4} & \underset{h'_y}{1}\end{bmatrix}$

Plano tang

$$z = h(1,2) + h'_x(1,2)(x-1) + h'_y(1,2)(y-2)$$

$$\boxed{z = 2 + 4(x-1) + 1(y-2)} \to \boxed{z = 4x + y - 4}$$

b) Hallar, aprox, $h(1{,}03;\ 1{,}98)$

$z = 4\times 1{,}03 + 1{,}98 - 4 = 2{,}1$ $\quad \boxed{h(1{,}03;1{,}98) \cong 2{,}1}$

NOTA :

AM2	Primer Parcial Prof: Amed	HOJA N° 4/4 FECHA 3-6-23

(P4) Sea la ec. $4x+6y-2z+2=0$ la del plano tangente en $\bar{X_0}=(2,1,z_0)$ a la gráfica de ecuación $z=h(x,y)$ / $h=f\circ\bar{g}$ con f diferenciable.

$$\bar{g}(x,y)=(x^2y,\ \varphi(x)+2y)$$

$$\phi(x)+x\phi'(x)=0 \quad \text{con} \quad \phi(2)=1$$

Hallar la derivada direccional máxima de f en (4,3) y la dirección responsable

$\bar{X}_0=(2,1,z_0) \rightarrow \begin{matrix} x=2 \\ y=1 \end{matrix} \rightarrow z_0? \rightarrow 4.2+6.1-2z_0+2=0 \rightarrow \boxed{z_0=8}$

$\boxed{\bar{X}_0=(2,1,8)}$

Hallo $\phi(x)$:

$$\phi(x)=-x\phi'(x)=-x\frac{d\phi}{dx}$$

$$\frac{-1}{x}dx=\frac{1}{\phi(x)}d\phi$$

integro m.a.m, $\quad -\ln(x)+C=\ln(\phi(x))$

$x^{-1}=\frac{1}{x}$ $\quad \rightarrow \ln(x^{-1})+C=\ln(\phi(x))$

$$\frac{k}{x}=\phi(x) \quad y \quad \phi(2)=1=\frac{k}{2}\rightarrow k=2$$

$$\boxed{\phi(x)=\frac{2}{x}} \rightarrow \boxed{\bar{g}(x,y)=\left(x^2y,\ \frac{2}{x}+2y\right)}$$

$$D\bar{g}(x,y)=\begin{pmatrix} 2xy & x^2 \\ -\frac{2}{x^2} & 2 \end{pmatrix}$$

$$\bar{g}'_{en(2,1)}=\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -\frac{1}{2} & 2 \end{pmatrix}$$

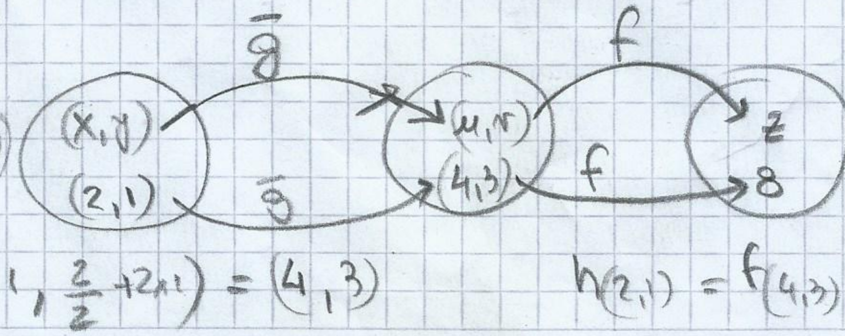
Ec. plano tg a gráfica de h en (2,1):

$$4x+6y-2z+2=0$$

$$\boxed{z=2x+3y+1} \rightarrow \begin{cases} h'_x(2,1)=2 \\ h'_y(2,1)=3 \end{cases}$$

$h=f\circ\bar{g}$

$h(x,y)=f(\bar{g}(x,y))$



$\bar{g}(2,1)=\left(2^2\times1,\ \frac{2}{2}+2\times1\right)=(4,3)$ $\qquad h(2,1)=f(4,3)=8$

NOTA

$$h_{(2,1)} = f_{(\bar{g}(2,1))} = f_{(4,3)} = 8$$

$$Dh_{(2,1)} = Df_{(\bar{g}(2,1))} \, D\bar{g}_{(2,1)}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix} = Df_{(4,3)} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -\frac{1}{2} & 2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} f'_{x(4,3)} & f'_{y(4,3)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ -1/2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 2 = f'_{x(4,3)} \cdot 4 - \frac{1}{2} f'_{y(4,3)} \\ 3 = f'_{x(4,3)} \, 4 + 2 f'_{y(4,3)} \end{cases} \rightarrow \begin{array}{l} f'_{x(4,3)} = 11/20 \\ f'_{y(4,3)} = 2/5 \end{array}$$

$$f'((4,3), \breve{u})\Big|_{max} \overset{\substack{f \text{ dif} \\ \downarrow}}{=} \|\nabla f_{(4,3)}\| = \sqrt{\left(\frac{11}{20}\right)^2 + \left(\frac{2}{5}\right)^2} = \frac{\sqrt{185}}{20}$$

$$\boxed{f'((4,3), \breve{u})\Big|_{max} = \frac{\sqrt{185}}{20}}$$

$$\breve{u}_{max} = \left(\frac{11/20}{\frac{\sqrt{185}}{20}}, \frac{2/5}{\frac{\sqrt{185}}{20}} \right)$$

$$\boxed{\breve{u}_{max} = \left(\frac{11}{\sqrt{185}}, \frac{8}{\sqrt{185}} \right)}$$

NOTA